$e^1 \dots e^n$ - базис V^* наз двойственным (взаимным, или дуальным) к базису $e_1 \dots e_n$

Глава 3. Собственные значения и собственные вектора

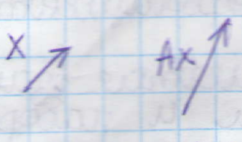
Диагонализация матрицы лин. оператора.

§1. Собственные значения и собственные вектора.

V - лин пр-во $A: V \to V$ линейный оператор

Отождествляем с матрицей.

Как действует на вектор? $A: x \to Ax$



вектора x, Ax в общем случае различны

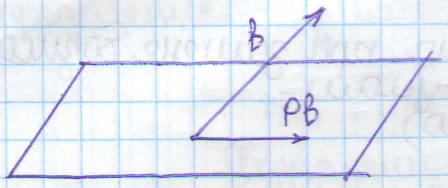
Но есть особый случай $x \parallel Ax$

Это и есть собственный вектор, т.е x - с.в.
λ - с.з.

$Ax = \lambda x$

пример: проекция на плоскость.

$\forall x \in$ плоскость $Px = x$ - целая плоскость собст. векторов



с $\lambda = 1$ собственные знач: $\lambda = 0$
$\lambda = 1$.

V - лин. пр-во $A: V \to V$ линейный оператор

Определение Вектор $x \neq 0$ наз. собственным вектором оператора A, если сущ. число λ такое, что $Ax = \lambda x$

Число λ наз собственным значением оператора A.

Определение Множество всех собственных значений наз. спектром оператора

23.03.18

примеры

1 M_n - пр-во многочленов степени n

D - оператор дифференцирования

M_0 - пр-во многочленов степени 0 - явл. собственные вект

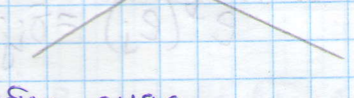
собст. знач = 0

$c' = 0 \cdot c$

2. Оператор проектирования $\overset{\text{на } L_1}{\text{параллельно}}$ L_2

$x = x_1 + x_2$

$x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$



$x \neq 0$ $\forall x \in L_1$ $\quad pr\, x = x$

L_1 - собст. вектора $\quad \lambda = 1$ - собств. значения

$\forall x_{\neq 0} \in L_2$ - собств. вектора, $\lambda = 0$ собст. знач

Пусть x, y – собств. вектор оператора A с собств. знач λ, т.е

$$Ax = \lambda x \ , \ Ay = \lambda y$$

Тогда $\alpha x + \beta y$ – тоже собств. вект. A собств. знач λ.

Действительно, $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$

Определение $V^\lambda = \{v \in V \mid Av = \lambda v\}$ – подпространство

Состоит из 0 и всех собств. векторов, отвечающих собств. знач λ

V^λ – собственное подпространство оператора A с собст. зн. λ

$\dim V^\lambda$ – геометрическая кратность собств. знач λ

$\dim V^\lambda = \text{geo mat}$

Теорема

собств. векторы $x_1, \dots x_n$ (оператор A), отвечающие различным собств. знач. $\lambda_1 \dots \lambda_k$ линейно независимы

Док-во индукция по K

$K=1$ верно, т.к $x_1 \neq 0$

$K-1 \to K$. Пусть $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0$.

Тогда $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k) = 0$.

$$\text{т.е} \left.\begin{aligned} \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k x_k &= 0 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k &= 0 \quad | \cdot \lambda_k \end{aligned}\right\} -$$

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)x_2 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0.$$

$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow$ по предположению индукции $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \lambda_{k-1} = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$

Следствие. Лин. оператор в n-мерном пространстве имеет не больше n собств. знач.

§2. Характеристический многочлен

x – собственный вектор $Ax = \lambda x$, т.е $(A - \lambda E)x = 0$
$x \neq 0$ $\qquad x \neq 0$

$\sim \operatorname{Ker}(A - \lambda E) \neq 0$

есть ненулевые решения $\Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0$.

Определение Характеристическим многочленом матрицы A наз

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda)$$

Теорема

Характеристические многочлены подобных матриц совпадают

Док-во: $\chi_B(\lambda) = \det(B-\lambda E) = \det(T^{-1}AT-\lambda E) = \det[T^{-1}(A-\lambda E)T] =$

$= \det T^{-1}\det(A-\lambda E)\cdot\det T = \chi_A(\lambda)$

Следствие. Все матрицы одного и того же оператора имеют одинаковые характеристические многочлены т. е характеристический многочлен оператора не зависит от выбора базиса.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = a_0 + a_1(-\lambda) + a_2(-\lambda)^2 + \dots + a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + (-\lambda)^n$$

$a_0 = \chi_A(a) = \det A$

$a_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \operatorname{tr} A$ (след. матрицы A)

$- a_{n-k} =$ сумма главных миноров k-го порядка

Док-во:

$$|A-\lambda B| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & a_{12}-\lambda b_{12} & \dots & a_{1n}-\lambda b_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1}-\lambda b_{n1} & a_{n2}-\lambda b_{n2} & & a_{nn}-\lambda B_{m} \end{vmatrix}$$

В этом определителе каждый столбец есть сумма двух столб.

Определитель может быть разложен в сумму определителей

пример

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda b_1 & a_2-\lambda b_2 \\ a_3-\lambda b_3 & a_4-\lambda b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2-\lambda b_2 \\ a_3 & a_4-\lambda b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda b_1 & a_2-\lambda b_2 \\ -\lambda b_3 & a_4-\lambda b_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -\lambda b_2 \\ a_3 & -\lambda b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda b_1 & a_2 \\ -\lambda b_3 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda b_1 & -\lambda b_2 \\ -\lambda b_3 & -\lambda b_4 \end{vmatrix}$$

$$-\lambda\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_3 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ b_3 & a_4 \end{vmatrix} \qquad (-\lambda)^2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

один столбец матрицы A

2 столбца матрицы A заменили на B

Коэффициент при $(-\lambda)^k$ равен сумме определителей, каждый из которых получается заменой каких-либо k столбцов матрицы A соотв столбцами матрицы B

Для $\chi_A = |A-\lambda E|$ для вычисления коэф. при $(-\lambda)^k$ мы должны взять сумму определителей, каждый из которых получается заменой k-столбцов матрицы A на столбцы E

Но каждый такой определитель есть главный минор n-k порядка

пример

$$A = \begin{pmatrix}7&2&0\\0&1&3\\0&3&4\end{pmatrix}$$

$\det A = -35$ $\quad$ $\operatorname{tr} A = 12$

$$\begin{vmatrix}7&2\\0&1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&3\\3&4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}7&0\\0&4\end{vmatrix} = 30.$$

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 30\lambda - 35 = 0$$

Определение Кратность λ как корня хар. многочлена наз. алгебраической кратностью

например $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^3$ alg malt 1 = 3.

Теорема Гамильтона - Кэли

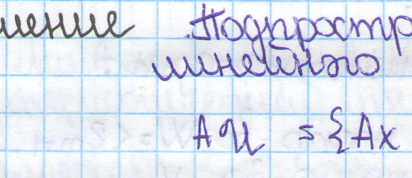
$\chi_A(A) = 0$ (Матрица явл. корнем своего характер. уравнения)

§3. Инвариантные подпространства

Пусть $A: V \to V$ - лин. оператор

Определение Подпространство $\mathcal{U} \subset V$ инвариантно относительн линейного оператора A, если $A: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$

$$A\mathcal{U} = \{Ax \mid x \in \mathcal{U}\}$$



примеры

1. Ker A, Im A - инвар. подпространства

$x \in \operatorname{Ker} A$, т.е $Ax = 0$

$y = Ax \Rightarrow Ay = A(Ax) = Ax_1$.

2. Оператор дифференцирования в пр-ве многочленов M_n

Инвариант. подпр-ва $M_0, M_1, M_2 \dots M_{n-1}$

Для линейного инварианта существование инвариантного подпространства влечет следующий факт:
можно построить базис, в котором матрица имеет более простую форму

Теорема

Пусть $AV \to V$ - лин. оператор
$\mathcal{U} \subset V$ - инвариантное подпр-во, $\mathcal{U} \neq \{0\}$

Тогда сущ. базис, в котором матрица оператора имеет квазитреугольную форму $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$

Док-во. Пусть $e_1 \dots e_m$ - базис $\mathcal{U}$

Дополним его до базиса V $(e_1 \dots e_m, e_{m+1} \dots e_n)$

т.к $Ae_i \in \mathcal{U}$
$i = 1 \dots m$

$Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{m1}e_m + 0 \cdot e_{m+1} + \dots + 0 \cdot e_n)$

$\vdots$

$Ae_m = a_{1m}e_1 + a_{2m}e_2 + \dots + a_{mm}e_m + 0 \cdot e_{m+1} + \dots + 0 \cdot e_n$

т.е матрица оператора A имеет вид

$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$

A_1 - $m \times n$ матрица
A_2 - $(n-m) \times (n-m)$ матрица

A_1 - матрица лин. оператора A, огран. на подпространстве $\mathcal{U}$

$A_1 = A|\mathcal{U}$

Замечание Верно и обратное, т.е если матрица A имеет квазитреугольную форму, то

$\mathcal{U} = \langle e_1 \dots e_m \rangle$ инвариантно отн A.

Если A_0 - нулевая матрица, то подпр-во $W = \langle e_{m+1} \dots e_n \rangle$ тоже инвариантное подпр-во V

$A_2 = A|W$

$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A|_\mathcal{U} & 0 \\ \hline 0 & A|_W \end{array}\right)$ $A = A|_\mathcal{U} + A|_W$ - прямая сумма операт

матрица имеет клеточно-диагональный вид.

Теорема

Пространство V явл. прямой суммой подпр-в

$V = \mathcal{U} \oplus W$ инвариантных отн. оператора A $\Leftrightarrow$

матрица оператора A в каком-либо базисе принимает клеточно-диагональный вид.

Следствие

$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ - инвариантно отн $A \Leftrightarrow$

в подходящем базисе $A_e = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \boxed{A_2} & \\ & & \ddots \ \boxed{A_m} \end{pmatrix}$

§4 Диагонализация матриц.

30.03.18

Определение: Лин. оператор $A: V \to V$ наз. диагонализируемым, если существует базис (e_i), в котором матрица оператора принимает диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Имеем: $Ae_1 = \lambda_1 e_1$

$Ae_2 = \lambda_2 e_2$, т.е $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ - собств. значения

$\vdots$ $\qquad e_1 \ldots e_n$ - собств. вектора

$Ae_n = \lambda_n e_n$

пример:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - не диагонализуется ни в каком базисе

Заметим, что $A^2 = 0$

Если бы существовала матрица T такая, что $T^{-1}AT = D$, то

$$D^2 = T^{-1}A\underbrace{TT^{-1}}_{E}AT = 0. \Rightarrow D = 0.$$

т.е оператор $A \equiv 0$

Лин. оператор $A: V \to V$

характеристический многочлен: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$

алгебраическая кратность $\text{alg mult}_A(\lambda_i) = n_i$

геометрическая кратность $V^{\lambda_i} = \{x \mid Ax = \lambda_i x\}$ - пространство собств. векторов, отвеч. собств. значений $\lambda_i \neq 0$

$\text{geo mult}_A(\lambda_i) = \dim V^{\lambda_i}$

пример

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \chi_A(\lambda) = \lambda^2 = (\lambda - 0)^2$

$\lambda_{12} = 0$ $\quad \text{alg mult}_A(0) = 2$

$Ax = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$ $\quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \text{geo mult}_A(0) = 1.$

Утверждение Геометрическая кратность собств. значений λ не превосходит его алгебраической кратности

Док-во . Геометрическая кратность λ_1 – размерность пр-ва решений $Ax = \lambda_1 x$.

Пусть она равна m.

пр-во V^{λ_1} – инвариантно относительно A (т.е $A(V^{\lambda_1}) \subset V^{\lambda_1}$)
т.к $x \in V^{\lambda_1}$, т.е $Ax = \lambda_1 x$,
то $Ax = A(\lambda_1 x) = \lambda_1 Ax$; $y = \lambda_1 y$, т.е $Ax \in V^{\lambda_1}$

Рассмотрим оператор $A_1 = A/_{V^{\lambda_1}}$

$$\det(A_1 - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda_1)^m$$

Действительно, пусть $e_1 \dots e_m$ – базис V^{λ_1}
Тогда матрица оператора A_1 в этом базисе имеет вид

$$A_1\Big|_{(e_1, \dots e_m)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix} & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^m \chi_C(\lambda)$$

$\chi_C(\lambda)$ ‖ $(\lambda_1 - \lambda)^k$ – может есть, а может нет

т.е alg mult $\lambda_1 \geq$ geom mult λ_1.

Теорема.
Пусть V – векторное пр-во над полем P ($P = \mathbb{R}$ или $P = \mathbb{C}$)
$A: V \to V$ – лин. оператор

A диагонализируем над P тогда и только тогда, когда выполняются след 2 условия:

1) все корни характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$ лежат в P
2) геометрическая кратность каждого собств. значения λ совпадает с его алгебраической кратностью.

Док-во „$\Rightarrow$" 1) 2) $\to$ диагонал.

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$

$$\dim V^{\lambda_i} = k_i.$$

Векторы из разных V^{λ_i} лин. независимы $\Rightarrow$

(*) $V^{\lambda_i} \cap (V^{\lambda_1} + \ldots + \underset{\text{его нет}}{\widehat{V^{\lambda_i}}} + \ldots + V^{\lambda_n}) = 0$, т.е сумма $V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2} \ldots + V^{\lambda_m}$ - прямая

Выберем в каждом V^{λ_i} базис из собств. векторов и объединим их $\Rightarrow$ получим базис V

Базис V состоит из лин независимых собств. векторов

В этом базисе
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots\lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & \ddots\lambda_2 & & \\ & & & & \lambda_m & \\ & & & & & \ddots\lambda_m \end{pmatrix}$$

„$\Leftarrow$" Пусть A диагонализируется

Пусть $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ - различные собств. знач. оператора A

$k_i = \dim V^{\lambda_i}$ выполняется равенство (*)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots\lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & \ddots\lambda_2 & & \\ & & & & \lambda_m & \\ & & & & & \ddots\lambda_m \end{pmatrix}$$

базис $V = \bigcup_{i=1}^{m}$ базис $V^{\lambda_i} \Rightarrow V = V^{\lambda_1} + \ldots + V^{\lambda_m}$

$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$.

<u>Следствие</u> Если в n-мерном пр-ве оператор A имеет n различных собств. значений, то A приводится к диаг. виду.

Глава 4. Жорданова нормальная форма (ЖНФ) Функция от матриц.

§1. Корневые подпространства. Теорема о расщеплении лин. оператора.

Определение Пусть λ - собств. значения оператора A. Вектор $x \in V$ наз. корневым вектором оператора A отвечающим собств. знач. λ, если

$$(A - \lambda E)^k x = 0 \text{ при некотором } k,\ k \geq 0.$$

Определение Высотой корневого вектора наз. наименьшее k

$$(A - \lambda E)^k x = 0.$$

<u>пример</u>: Оператор дифференцирования в $C^\infty(\mathbb{R})$

$Df(x) = f'(x)$

собств. векторы $e^{\lambda x}$; корневые $P(x)e^{\lambda x}$; $P(x)$ - многочлен

высота $= \deg P + 1$.